第14講　確率(2)

【基礎確認事項】

［1］　反復試行の確率

□同じ試行を独立に何回か繰り返すことを**反復試行**という．

反復試行の例を見てみよう．

例　さいころを続けて5回投げたとき，1の目が3回出る確率を求める．

1回投げたとき，1の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ であり，1の目が出ない確率は $\frac{5}{6}$ である．

5回中，1の目が3回出る場合の数は，それがどこで出たかを選ぶ ${}_5C_3=10$（通り）あり，ここで選ばれなかった2回は1以外の目が出ている．

1の目がどこで出たとしても，乗法定理によりその確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

である．つまり10通りのいずれもその確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2$ である．

したがって，求める確率は ${}_5C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2=10\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{125}{3888}$

□一般に，どの回においても独立な試行において，1回の試行で事象 A の起こる確率を p とすると，n 回行う反復試行において，A がちょうど r 回起こる確率は ${}_nC_r p^r(1-p)^{n-r}$ である．

□反復試行においては，扱う事象が2つ以上になることや，事象に様々な制約（回数制限など）がつくことがあるため，確率を求める事象が何通りあるかについては必ずしも ${}_nC_r$ だけでは決まらない．

⇒　C&U 1

［2］　条件付き確率と乗法定理

□2つの事象 A，B があって，A の起こる確率 $P(A)$ は0でないとする．いま，A が起こったことを前提として B が起こるとき，その確率を $\boldsymbol{P_A(B)}$ で表し，これを A が起こったときの B の起こる**条件付き確率**という．

例　10本のうち3本が当たりくじであるくじを a，b 2人が1本ずつ順に引くとする．引いたくじはもとに戻さない．

a，b が当たることをそれぞれ事象 A，B とすると，A が起こったとき，残った9本のうち当たりくじは2本である．よって $P_A(B)=\frac{2}{9}$ である．

□$P(A)>0$，$P(B)>0$ のとき，一般に，以下の**乗法定理**が成り立つ．

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A)$$

例　52枚のトランプのカードから，2枚のカードを続けて引くとき，2枚ともハー

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

トである確率について

1枚目がハートである事象を A，2枚目がハートである事象を B とすると，求める確率は　$P(A\cap B)$　である．

$P(A)=\dfrac{13}{52}$，$P_A(B)=\dfrac{12}{51}$ であるから，乗法定理により

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{13}{52}\cdot\frac{12}{51}=\frac{1}{17}$$

もちろん，順列の考え方を使えば，$P(A\cap B)=\dfrac{{}_{13}\mathrm{P}_2}{{}_{52}\mathrm{P}_2}=\dfrac{1}{17}$　である．

□事象 A と事象 B が独立のときは，$P_A(B)=P(B)$ であるため

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)=P(A)\cdot P(B)$$　である．

これが独立試行の乗法定理である．この式が成り立つとき，事象 A と B は独立であり，成り立たないとき，従属であるという．

□乗法定理を変形することにより，以下のことがいえる．

> 事象 A が起こったとき，事象 B が起こる確率 $P_A(B)$ は
> $$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

分子は「A も B も起こる確率」であり当然であるが，分母が「$P(A)$」となっていることに注目しよう．「事象 A が起こることが前提」であることを忘れずに．

⇒　C&U ②

［3］　期待値

□一般に，全事象が排反事象 A_1，A_2，A_3，……，A_n に分けられ，それぞれの事象の確率が p_1，p_2，p_3，……，p_n であるときを考える．また，1つの変数 X を考え，事象 A_i が起こったら値 x_i をとるとする．

X	x_1	x_2	x_3	……	x_n	計
p	p_1	p_2	p_3	……	p_n	1

このとき，$x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots\cdots+x_np_n$　で得られる値を変数 X の**期待値**といい，$\boldsymbol{E(X)}$ で表す．

> $E(X)=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots\cdots+x_np_n$

⇒　C&U ③

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【CHECK & UP】

1　1つのさいころを5回連続で投げるとき，次の確率を求めよ．

(1)　1の目がちょうど2回出る確率

(2)　1の目がちょうど1回，2の目がちょうど2回出る確率

(3)　5回目の試行で，3度目の偶数が出る確率

2　(1)　白球4個，黒球3個が入った袋から続けて2球取り出すとき，ともに白球である確率を求めよ．

(2)　コイン3枚を同時に投げる．少なくとも1枚は裏であるとき，3枚とも裏である確率を求めよ．

3　1と書かれたカードが1枚，2と書かれたカードが2枚，3と書かれたカードが3枚，4と書かれたカードが4枚入った袋がある．この中からカードを1枚取り出すとき，そのカードの番号の期待値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第14講　確率(2)

1　円周を6等分する点を時計回りの順にA，B，C，D，E，Fとし，点Pは点Aを出発点として時計回りに円周上の点を移動する．さいころを振って偶数の目が出たときは2，奇数の目が出たときは1だけ動くこととする．点Pがちょうど点Aに着いたときに終了する．

(1)　ちょうど1周して終了する確率を求めよ．

(2)　ちょうど2周して終了する確率を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　A，B 2つの袋があって，A には白球 4 個と赤球 6 個，B には白球 5 個と赤球 5 個が入っている．A から 1 球取り出して B に入れ，よくかきまぜてから 1 球取り出して A に入れるとき，次の確率を求めよ．

(1)　A の白球の数が増加する確率

(2)　A の白球の数が減少する確率

(3)　A の白球の数が変わらない確率

[2]　白球 5 個と赤球 3 個が入っている袋から，1 個ずつ順に 3 個の球を取り出した．1 番目の球が赤であるとき，3 番目の球が白である確率を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　2個のさいころを同時に投げるとき，2個のさいころの出目の和の期待値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第14講　確率(2)

A，Bの2人が次のような規則の下で得点を競うゲームを行う．1個のさいころを投げて1か2の目が出た場合はAがその回の勝者として2点を得て，3以上の目が出た場合はBがその回の勝者として1点を得るものとし，この操作を繰り返して先に4点得た方をゲームの優勝者としてゲームを終了する．

このとき，Aが優勝者となる確率を求めたい．Bが優勝者となるためには，Aが2回勝つ前にBが4回勝たなければならない．Bが1回目から4連勝して優勝者となる確率は $\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ である．また，Bが1回目から4連勝せずに優勝者となる確率は $\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キクケ}}$ である．したがって，Aが優勝者となる確率は $\dfrac{\boxed{コサシ}}{\boxed{キクケ}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 14 講　確率(2)

【CHECK & UP】

1 (1)　5 回中，1 の目が出る 2 回を選ぶ方法が $_5C_2$ 通り．
残りの 3 回は 1 以外の目が出ている．
この $_5C_2$ 通りのいずれが起こる確率も
$\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3$ である．
したがって求める確率は

$$_5C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\frac{5^3}{6^5}=\frac{5^4}{3\cdot6^4}=\mathbf{\frac{625}{3888}}$$

反復試行において，ある事象が起こる「回数」が与えられているとき，その事象がどの回で起こっても確率は変わらない．つまり，「どこの回で起こるのか」の決め方の分（今回は $_5C_2$）だけ同じ確率が発生する，と考えるのである．よって
（事象が起こる場合の数）×（その確率）
となるのである．

(2)　5 回中，1 の目が 1 回，2 の目が 2 回，
その他が 2 回出る場合の数は
1，2，2，×，× の順列で　$\frac{5!}{2!2!}$ 通り．
したがって求める確率は

$$\frac{5!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)^2=30\cdot\frac{4^2}{6^5}=\frac{5\cdot4^2}{6^4}=\mathbf{\frac{5}{81}}$$

反復試行において，扱う事象が 3 つ（以上）になると，その場合の数の決め方として $_nC_r$ を羅列させるより「同じものを含む順列」として扱う方が「立式・計算が速い」場合がある．もちろんどちらも結果は同じになる．反復試行は必ず $_nC_r$ を用いる，という幻想は抱かないようにしたい．

(3)　5 回目の試行で 3 度目の偶数が出るのは，
1～4 回目の試行で 2 回のみ偶数が出て，5 回目で偶数が出る場合である．
よって求める確率は

$$_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=6\cdot\frac{1}{32}=\mathbf{\frac{3}{16}}$$

最後の回の事象が決定している．よって場合の数を考える際，1～4 回目のみ決めていることがわかる．

2 (1)　1 回目に白球を取り出す確率は　$\frac{4}{7}$
その後，2 回目に白球を取り出す確率は　$\frac{3}{6}$
したがって求める確率は　$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\mathbf{\frac{2}{7}}$

「条件付き確率」の基本問題である．球をもとに戻さない場合は，前に取り出した球によって次の事象が起こる確率が変化する．それぞれで確率を求めてそれらの積により求めることができることは，それが「順列」の考え方で求められることからもわかる．

【別解】　球をすべて区別すると，白球 4 個，黒球 3 個が入った袋から
同時に 2 球取り出して並べる方法が　$_7P_2$ 通り
白球 4 個から 2 個取り出して並べる方法が　$_4P_2$ 通り
したがって求める確率は　$\frac{_4P_2}{_7P_2}=\frac{4\cdot3}{7\cdot6}=\mathbf{\frac{2}{7}}$

(2)　コイン 3 枚を同時に投げたとき，少なくとも 1 枚が裏である事象を A，3 枚とも裏である事象を B とすると，求める確率は　$P_A(B)$ である．
コインを 3 枚同時に投げたとき，起こり得るすべての事象は $2^3=8$（通り）
事象 A は 3 枚すべて表であることの余事象であることより 7 通り．
よって　$P(A)=\frac{7}{8}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$A\cap B$ は「少なくとも1枚が裏　かつ　3枚とも裏」，

すなわち「3枚とも裏」であることより，$P(A\cap B)=\frac{1}{8}$

したがって，$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{8}\div\frac{7}{8}=\mathbf{\frac{1}{7}}$

「少なくとも1枚は裏」ということが「前提」であることに注意．3枚のコインの表裏は8通りあるが，この前提により「7通り」を全事象とするイメージである．このうち，すべて裏であるのは1通り．したがって求める確率は $\frac{1}{7}$ なのである．

3　与えられた10枚のカードから

1を取り出す確率は $\frac{1}{10}$，2を取り出す確率は $\frac{2}{10}$，

3を取り出す確率は $\frac{3}{10}$，4を取り出す確率は $\frac{4}{10}$

である．したがって求めるカードの番号の期待値は

$$1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{2}{10}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{4}{10}=\frac{1}{10}(1+4+9+16)=\mathbf{3}$$

「期待値」の指導のタイミングは，教育課程によって，または学校によって異なる．確率の学習が一通り終了しても未習の場合は，「分散」などとともに後日学習する事項となる．また，「数列」とも密接な関係がある分野であるため，この講座においては「確率の平均」として軽めの扱いとしておく．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第14講　確率(2)

1　円周を6等分する点を時計回りの順にA，B，C，D，E，Fとし，点Pは点Aを出発点として時計回りに円周上の点を移動する．さいころを振って偶数の目が出たときは2，奇数の目が出たときは1だけ動くこととする．点Pがちょうど点Aに着いたときに終了する．

(1)　ちょうど1周して終了する確率を求めよ．

(2)　ちょうど2周して終了する確率を求めよ．

(1)　ちょうど1周して終了するとき，偶数の目がx回，奇数の目がy回出るとすると

$2x+y=6$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$

これを満たす整数(x, y)の組は　$(x, y)=(0, 6), (1, 4), (2, 2), (3, 0)$

偶数の目，奇数の目がそれぞれ何回目に出たかを考え，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\mathbf{\frac{43}{64}}$$

(2)　ちょうど2周して終了するのは，AからFに進み，Aに止まらずBに進み，BからAに進む場合である．

AからFに進むとき，$2x+y=5$より　$(x, y)=(0, 5), (1, 3), (2, 1)$

その確率は　$\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{21}{32}$

FからAに止まらずBに進むのは，偶数の目が出たときで，その確率は$\frac{1}{2}$

BからAに進むのは，AからFに進むのと同じで，その確率は$\frac{21}{32}$

したがって，求める確率は　$\frac{21}{32}\times\frac{1}{2}\times\frac{21}{32}=\mathbf{\frac{441}{2048}}$

2　[1]　A，B2つの袋があって，Aには白球4個と赤球6個，Bには白球5個と赤球5個が入っている．Aから1球取り出してBに入れ，よくかきまぜてから1球取り出してAに入れるとき，次の確率を求めよ．

(1)　Aの白球の数が増加する確率

(2)　Aの白球の数が減少する確率

(3)　Aの白球の数が変わらない確率

(1)　Aの白球が増えるのは，Aから赤球を取り出し，Bから白球を取り出すとき．

よって求める確率は　$\frac{6}{10}\times\frac{5}{11}=\mathbf{\frac{3}{11}}$

(2)　Aの白球が減るのは，Aから白球を取り出し，Bから赤球を取り出すとき．

よって求める確率は　$\frac{4}{10}\times\frac{5}{11}=\mathbf{\frac{2}{11}}$

(3)　Aの白球の数が変わらないのは，(1)(2)以外のとき．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって求める確率は　$1-\left(\dfrac{3}{11}+\dfrac{2}{11}\right)=\mathbf{\dfrac{6}{11}}$

2 [2]　白球 5 個と赤球 3 個が入っている袋から，1 個ずつ順に 3 個の球を取り出した． 1 番目の球が赤であるとき，3 番目の球が白である確率を求めよ．

1 番目に取り出した球が赤である事象を A，3 番目に取り出した球が白である事象を B とする．$A\cap B$ は 1 番目から順に赤赤白，または赤白白，と出る場合である．

$$P(A)=\frac{3}{8},\qquad P(A\cap B)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{3}{8}\left(\frac{10}{42}+\frac{20}{42}\right)=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}$$

したがって求める確率は　$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\mathbf{\dfrac{5}{7}}$

【別解】　1 番目に赤球を取り出したとき，残りの球は白球 5 個，赤球 2 個である．ここから次の 2 回で順に赤白，または白白，と出ればよい．

したがって求める確率は　$P_A(B)=\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{5}{6}+\dfrac{5}{7}\cdot\dfrac{4}{6}=\mathbf{\dfrac{5}{7}}$

3　2 個のさいころを同時に投げるとき，2 個のさいころの出目の和の期待値を求めよ．

出目の和に対し，2 つのさいころの出目の組合せを考える．

和が 2 ･･･ <u>(1，1)</u>　　和が 3 ･･･ (1，2)　　和が 4 ･･･ (1，3)，<u>(2，2)</u>

和が 5 ･･･ (1，4)，(2，3)　　和が 6 ･･･ (1，5)，(2，4)，<u>(3，3)</u>

和が 7 ･･･ (1，6)，(2，5)，(3，4)　　和が 8 ･･･ (2，6)，(3，5)，<u>(4，4)</u>

和が 9 ･･･ (3，6)，(4，5)　　和が 10 ･･･ (4，6)，<u>(5，5)</u>

和が 11 ･･･ (5，6)　　和が 12 ･･･ <u>(6，6)</u>

それぞれの出目がどちらのさいころで出たかを順列で考えると，＿＿＿の組合せに対しては 1 通り，それ以外は 2! 通り．したがって求める期待値は

$$2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\frac{5}{36}+7\times\frac{6}{36}+8\times\frac{5}{36}$$
$$+9\times\frac{4}{36}+10\times\frac{3}{36}+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36}$$

$$=\frac{1}{36}(2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12)$$

$$=\frac{1}{36}\times 252$$

$$=\mathbf{7}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第14講　確率(2)

A，Bの2人が次のような規則の下で得点を競うゲームを行う．1個のさいころを投げて1か2の目が出た場合はAがその回の勝者として2点を得て，3以上の目が出た場合はBがその回の勝者として1点を得るものとし，この操作を繰り返して先に4点得た方をゲームの優勝者としてゲームを終了する．

このとき，Aが優勝者となる確率を求めたい．Bが優勝者となるためには，Aが2回勝つ前にBが4回勝たなければならない．Bが1回目から4連勝して優勝者となる確率は $\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ である．また，Bが1回目から4連勝せずに優勝者となる確率は $\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キクケ}}$ である．したがって，Aが優勝者となる確率は $\dfrac{\boxed{コサシ}}{\boxed{キクケ}}$ である．

さいころを1回投げてAが勝者として2点を得る事象を A，Bが勝者として1点を得る事象を B とすると，

$$P(A)=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{2}{3}$$

Bが1回目から4連勝する確率は $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\mathbf{\dfrac{16}{81}}$

Bが1回目から4連勝せずに優勝者となるのは，さいころを4回投げて事象 B が3回，事象 A が1回起こり，5回目に投げて事象 B が起こるときである．

その確率は ${}_4\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\dfrac{2}{3}=\mathbf{\dfrac{64}{243}}$

よって，Bが優勝者となる確率は $\dfrac{16}{81}+\dfrac{64}{243}=\dfrac{112}{243}$

したがって，Aが優勝者となる確率は $1-\dfrac{112}{243}=\mathbf{\dfrac{131}{243}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。